

7.1

Kirjataan silmälukujen erot taulukkoon.

nelisivuinen noppa

4	3	2	1	0	1	2
3	2	1	0	1	2	3
2	1	0	1	2	3	4
1	0	1	2	3	4	5
	1	2	3	4	5	6

kuusisivuinen noppa

Silmälukujen ero voi olla 0, 1, 2, 3, 4 tai 5.

Lasketaan satunnaismuuttujan X : ”silmä’lukujen ero” arvojen todennäköisyydet ja kootaan tiedot jakaumataulukko.

X	P
0	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
1	$\frac{7}{24}$
2	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
3	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$
4	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{24}$

Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{7}{24} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{24} \cdot 5$$

$$\approx 1,83$$

Vastaus

$$E(X) \approx 1,83$$

7.2

Kirjataan silmälukujen summat taulukkoon.

2. noppa

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7

1 2 3 4 5 6

1. noppa

Silmälukujen summa voi olla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 tai 12.

Lasketaan satunnaismuuttujan X : ”silmälukujen summa” arvojen todennäköisyydet ja kootaan tiedot jakaumataulukkaan.

X	P
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
4	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
5	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

X	P
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
10	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
11	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
12	$\frac{1}{36}$

Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{1}{18} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 7 \\
 &\quad + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{1}{12} \cdot 10 + \frac{1}{18} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

Kun heitetään kahta noppaa hyvin monta kertaa, niin saatujen silmälukuparien summien keskiarvo lähestyy lukua 7.

Vastaus

$$E(X) = 7$$

Kun heitetään kahta noppaa hyvin monta kertaa, niin saatujen silmälukuparien summien keskiarvo lähestyy lukua 7.

7.3

- a) Muodostetaan ensin satunnaismuuttujan X : ”pelaajan yhdellä pelikierroksella saama voitto” jakauma. Voitto tarkoittaa saadun ja sijoitetun rahamäärän erotusta. Pelaajan saamalla voitolla on kolme mahdollista arvoa.

- $10 \text{ €} - 3 \text{ €} = 7 \text{ €}$ (silmäluku 6, pelaaja saa 10 € ja maksaa 3 €)
- $3 \text{ €} - 3 \text{ €} = 0 \text{ €}$ (pariton silmäluku, pelaaja saa 3 € ja maksaa 3 €)
- $0 \text{ €} - 3 \text{ €} = -3 \text{ €}$ (silmäluvut 2 ja 4, pelaaja saa 0 € ja maksaa 3 €)

Määritetään satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
7 €	$\frac{1}{6}$
0 €	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
-3 €	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-3) = \frac{1}{6} \approx 0,17 \text{ (€)}$$

Yhdellä pelikierroksella pelaajan voiton odotusarvo on 0,17 €, eli hän voittaa keskimäärin 0,17 € jokaisella kierroksella.

- b) Pelaaja voittaa yhdellä pelikierroksella keskimäärin $\frac{1}{6}$ euroa. Pelaajan voidaan ennakoida 500 pelikierroksen jälkeen olevan voitolla noin $500 \cdot \frac{1}{6} \text{ €} = \frac{250}{3} \text{ €} = 83,333... \text{ €} \approx 80 \text{ €}$.

Vastaus

a) 0,17 €

b) voitolla 80 euroa

7.4

a) Saatuja rahasummia vastaavien kulmien suuruudet ovat:

- $0 \text{ €} : 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$
- $5 \text{ €} : 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$
- $10 \text{ €} : 60^\circ$
- $20 \text{ €} : 45^\circ$

Pyöräytys maksaa 5 euroa, joten mahdolliset voitot ovat

$$\begin{aligned}0 \text{ €} - 5 \text{ €} &= -5 \text{ €}, \\5 \text{ €} - 5 \text{ €} &= 0 \text{ €}, \\10 \text{ €} - 5 \text{ €} &= 5 \text{ €} \text{ ja} \\20 \text{ €} - 5 \text{ €} &= 15 \text{ €}.\end{aligned}$$

Määritetään satunnaismuuttujan X : ”pelaajan voitto yhdellä pyöräytyksellä” odotusarvo.

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot (-5) + \frac{105^\circ}{360^\circ} \cdot 0 + \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 5 + \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 15 \\&= \frac{5}{8} = 0,625 \approx 0,63(\text{€})\end{aligned}$$

Yhden pyöräytyksen voiton odotusarvo on noin 0,63 €.

b) Arvioidaan kokonaisvoittoa 50 pyöräytyksen jälkeen.

$$50 \cdot \frac{5}{8} \text{ €} = \frac{125}{4} \text{ €} = 31,25 \text{ €} \approx 30 \text{ €}$$

Kokonaisvoitto on noin 30 €.

Vastaus

a) 0,63 €

b) voitolla 30 €

7.5

- a) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 4$.
Yksittäisessä toistossa Tärpin todennäköisyys $p = 30 \% = 0,30$.

Neljällä heitolla voi saada 0, 1, 2, 3 tai 4 Tärppiä, joten satunnaismuuttujalla X : ”Tärppien lukumäärä neljällä heitolla” on viisi mahdollista arvoa.

Määritetään satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
0	$\binom{4}{0} \cdot 0,30^0 \cdot 0,70^4 = 0,2401$
1	$\binom{4}{1} \cdot 0,30^1 \cdot 0,70^3 = 0,4116$
2	$\binom{4}{2} \cdot 0,30^2 \cdot 0,70^2 = 0,2646$
3	$\binom{4}{3} \cdot 0,30^3 \cdot 0,70^1 = 0,0756$
4	$\binom{4}{4} \cdot 0,30^4 \cdot 0,70^0 = 0,0081$

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta GeoGebran taulukkolaskennalla.

Taulukoidaan satunnaismuuttujan arvot. Käytetään frekvensseinä satunnaismuuttujan arvojen todennäköisyyksiä.

	A	B
1	0	0.2401
2	1	0.4116
3	2	0.2646
4	3	0.0756
5	4	0.0081

Määritetään tilastolliset tunnusluvut.

Tilastot	
n	1
Keskiarvo	1.2
σ	0.9165
s	61506289.8165
Σx	1.2
Σx^2	2.28
Min	0
Q1	?
Mediaani	?
Q3	?
Max	4

Odotusarvo on $E(X) = 1,2$ ja keskihajonta $D(X) \approx 0,9$.

Huomaa, että taulukkolaskentaohjelma ei pysty laskemaan otoskeskihajontaa (oheisessa taulukossa s), koska siinä nimittäjänä on $n - 1$, missä n on todennäköisyyksien summa 1. Näin nimittäjäksi tulee 0 ja jakolaskun tulos taulukkolaskentaohjelmassa on epämääräinen. Tämän ongelman voi kiertää antamalla frekvenssit esimerkiksi prosentteina tai vaikka kokonaislukuina 2401, 4116, 2646, 756 ja 81.

b) Kyseessä on toistokoe, jossa toistojen lukumäärä $n = 4$.

Yksittäisessä toistossa Tärpin todennäköisyys $p = 30 \% = 0,30$.
Satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(4; 0,30)$.

Lasketaan odotusarvo ja keskihajonta.

$$E(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0,30 = 1,2$$

$$D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{4 \cdot 0,30 \cdot (1 - 0,30)} \approx 0,9$$

Vastaus

a) $E(X) = 1,2$, $D(X) \approx 0,9$

b) $E(X) = 1,2$, $D(X) \approx 0,9$

7.6

Heitetään kahta tavallista noppaa. Olkoon satunnaismuuttuja X : ”silmälukujen summan neliö”.

Taulukoidaan satunnaismuuttujan X arvot.

1. noppa	6	49	64	81	100	121	144
	5	36	49	64	81	100	121
	4	25	36	49	64	81	100
	3	16	25	36	49	64	81
	2	9	16	25	36	49	64
	1	4	9	16	25	36	49
		1	2	3	4	5	6
		2. noppa					

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
4	$\frac{1}{36}$
9	$\frac{2}{36}$
16	$\frac{3}{36}$
25	$\frac{4}{36}$
36	$\frac{5}{36}$
49	$\frac{6}{36}$

64	$\frac{5}{36}$
81	$\frac{4}{36}$
100	$\frac{3}{36}$
121	$\frac{2}{36}$
144	$\frac{1}{36}$

Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$E(X) = \frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{2}{36} \cdot 9 + \dots + \frac{2}{36} \cdot 121 + \frac{1}{36} \cdot 144 = \frac{329}{6} \approx 54,8$$

Vastaus

54,8

7.7

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”nostettujen pallojen lukujen summa”.

Summa voi olla

3 (3 ykköstä),

4 (2 ykköstä ja 1 kakkonen),

5 (1 ykkönen ja 2 kakkosta) tai

6 (3 kakkosta).

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
3	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0,05$
4	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{9}{20} = 0,45$
5	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{9}{20} = 0,45$
6	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 0,05$

Lasketaan odotusarvo.

$$E(X) = 0,05 \cdot 3 + 0,45 \cdot 4 + 0,45 \cdot 5 + 0,05 \cdot 6 = 4,54 \approx 4,5$$

Vastaus

X	Todennäköisyys
3	0,05
4	0,45
5	0,45
6	0,05

$$E(X) = 4,5$$

7.8

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”Juuson voitto yhdellä arvalla”.
Arvan hinta on 2 euroa.

Satunnaismuuttujalla X on neljä mahdollista arvoa.

- $1000 \text{ €} - 2 \text{ €} = 998 \text{ €}$
- $500 \text{ €} - 2 \text{ €} = 498 \text{ €}$
- $100 \text{ €} - 2 \text{ €} = 98 \text{ €}$
- $0 \text{ €} - 2 \text{ €} = -2 \text{ €}$

Määritetään satunnaismuuttujan X jakauma.

$X \text{ (€)}$	P
998	0,000 25
498	$0,000\ 25 \cdot 4 = 0,001$
98	$0,001 \cdot 5 = 0,005$
-2	$1 - (0,000\ 25 + 0,001 + 0,005) = 0,993\ 75$

Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0,00025 \cdot 998 + 0,001 \cdot 498 + 0,005 \cdot 98 + 0,99375 \cdot (-2) \\ &= -0,75(\text{€}) \end{aligned}$$

Voiton odotusarvo on $-0,75 \text{ €}$.

Vastaus

$-0,75 \text{ €}$

7.9

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”pelaajan yhdellä kierroksella saama voitto”.

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.

Silmäluku	X (€)	P
1	$-3 - 1 = -4$	$\frac{1}{6}$
2	$-3 - 2 = -5$	$\frac{1}{6}$
3	$-3 + 3 = 0$	$\frac{1}{6}$
4	$-3 + 4 = 1$	$\frac{1}{6}$
5	$-3 + 5 = 2$	$\frac{1}{6}$
6	$-3 + 6 = 3$	$\frac{1}{6}$

Lasketaan yhden kierroksen voiton odotusarvo.

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot (-4) + \frac{1}{6} \cdot (-5) + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 = -\frac{1}{2} (\text{€})$$

Arvioidaan kokonaisvoiton suuruutta 20 pelikerran jälkeen.

$$20 \cdot \left(-\frac{1}{2} \text{€}\right) = -10 \text{€}$$

Kokonaisvoiton suuruus 20 pelikerran jälkeen on noin -10 €, eli pelaaja on noin 10 euroa tappiolla.

Vastaus

tappiolla 10 €

7.10

Noppaa heitetään, kunnes saadaan parillinen luku tai kolme paritonta lukua.

Heittoja tehdään vähintään yksi ja korkeintaan kolme.

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”heittojen lukumäärä”.

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
1	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

1. parillinen

1. pariton, 2. parillinen

1. pariton, 2. pariton, 3. parillinen TAI

1. pariton, 2. pariton, 3. pariton

Lasketaan heittojen lukumäärän odotusarvo.

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{7}{4} = 1,75$$

Vastaus

1,75

7.11

a) Pistemäärien todennäköisyydet yhdellä heitolla ovat

$$P("10") = \frac{\pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 25^2} = \frac{1}{25}$$

$$P("5") = \frac{\pi \cdot 15^2 - \pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 25^2} = \frac{8}{25}$$

$$P("1") = \frac{\pi \cdot 25^2 - \pi \cdot 15^2}{\pi \cdot 25^2} = \frac{16}{25}$$

Määritetään kahdella tikalla saatujen pistemäärien tulon mahdolliset arvot.

$$\begin{array}{lll} 1 \cdot 1 = 1 & 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5 & 1 \cdot 10 = 10 \cdot 1 = 10 \\ 5 \cdot 5 = 25 & 5 \cdot 10 = 10 \cdot 5 = 50 & 10 \cdot 10 = 100 \end{array}$$

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”tikkojen pistemäärien tulo”.
Muodostetaan sen jakauma.

X	P
1	$\frac{16}{25} \cdot \frac{16}{25} = \frac{256}{625}$
5	$\frac{16}{25} \cdot \frac{8}{25} + \frac{8}{25} \cdot \frac{16}{25} = \frac{256}{625}$
10	$\frac{16}{25} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{25} \cdot \frac{16}{25} = \frac{32}{625}$
25	$\frac{8}{25} \cdot \frac{8}{25} = \frac{64}{625}$
50	$\frac{8}{25} \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{25} \cdot \frac{8}{25} = \frac{16}{625}$
100	$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{625}$

b) Lasketaan tulon odotusarvo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{256}{625} \cdot 1 + \frac{256}{625} \cdot 5 + \frac{32}{625} \cdot 10 + \frac{64}{625} \cdot 25 + \frac{16}{625} \cdot 50 + \frac{1}{625} \cdot 100 \\ &= 6,9696 \approx 6,97 \end{aligned}$$

Vastaus

a)

<i>X</i>	<i>P</i>
1	$\frac{256}{625}$
5	$\frac{256}{625}$
10	$\frac{32}{625}$
25	$\frac{64}{625}$
50	$\frac{16}{625}$
100	$\frac{1}{625}$

b) 6,97

7.12

$X(\text{€})$	P
19	a
b	0,01
1	0,05
-1	0,9375

Satunnaismuuttujan arvojen todennäköisyyksien summa on aina tasan 1.

Ratkaistaan a .

$$a + 0,01 + 0,05 + 0,9375 = 1$$

$$a + 0,9975 = 1$$

$$a = 0,0025$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on $-0,75$ €. Ratkaistaan b .

$$E(X) = -0,75$$

$$0,0025 \cdot 19 + 0,01 \cdot b + 0,05 \cdot 1 + 0,9375 \cdot (-1) = -0,75$$

$$0,01b - 0,84 = -0,75$$

$$b = 9 \text{ (€)}$$

Vastaus

$$a = 0,0025; \quad b = 9$$

7.13

- 1) Pelaaja menettää kaikki panoksensa, jos

tulos on luku, joka **ei ole punainen, eikä väliltä 1 – 12:**

0, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35 (13 kpl).

Pelaajan voitto on $-7 + 0 = -7$ pelimerkkiä.

- 2) Pelaaja menettää viiden pelimerkin panoksen ja voittaa kahden pelimerkin panoksella, jos

luku **on väliltä 1 – 12, eikä se ole punainen:**

2, 4, 6, 8, 10, 11 (6 kpl)

Pelaajan voitto on $-7 + 3 \cdot 2 = -1$.

- 3) Pelaaja menettää kahden pelimerkin panoksen ja voittaa viiden pelimerkin panoksella, jos

luku **on punainen, mutta ei väliltä 1 – 12:**

14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36 (12 kpl).

Pelaajan voitto on $-7 + 2 \cdot 5 = 3$.

- 4) Pelaaja voittaa molemmilla panoksilla, jos

tulos on **punainen luku väliltä 1 – 12:**

1, 3, 5, 7, 9, 12 (6 kpl).

Pelaajan voitto on $-7 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 9$.

Olkoon satunnaismuuttuja X : ”pelaajan voitto yksittäisellä kierroksella”.

Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma.

X	P
-7	$\frac{13}{37}$
-1	$\frac{6}{37}$
3	$\frac{12}{37}$
9	$\frac{6}{37}$

Lasketaan pelaajan voiton odotusarvo yhdellä kierroksella.

$$E(X) = \frac{13}{37} \cdot (-7) + \frac{6}{37} \cdot (-1) + \frac{12}{37} \cdot 3 + \frac{6}{37} \cdot 9 = -\frac{7}{37}$$

Arvioidaan pelaajan kokonaisvoittoa, kun samoilla panoksilla pelataan 60 kierrosta.

$$60 \cdot \left(-\frac{7}{37}\right) \approx -11$$

Pelaaja on tappiolla noin 11 pelimerkkiä.

Vastaus

tappiolla 11 pelimerkkiä